CHƯƠNG 4. LÝ THUYẾT TRƯỜNG

GIỚI THIỆU

Trong vật lý, đặc biệt trong kỹ thuật thường gặp khái niệm trường: Trường nhiệt độ, từ trường, điện trường,.... Khái niệm trường trong toán học là tổng quát hoá các trường hợp cụ thể đó. Miền $\Omega \in \mathbb{R}^3$ xác định một trường vô hướng *u(x,y,z)* nếu tại mọi điểm $M(x,y,z) \in \Omega$ đều xác định đại lượng vô hướng *u(M)*. Chẳng hạn trường nhiệt độ là một trường vô hướng. Vậy đặc trưng của trường vô hướng là một hàm vô hướng. Miền $\Omega \in \mathbb{R}^3$ xác định một trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ nếu tại mọi điểm $M(x,y,z) \in \Omega$ đều xác định đại lượng véctơ:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z).\vec{i} + Q(x,y,z).\vec{j} + R(x,y,z).\vec{k} = (P,Q,R)$$

Chẳng hạn từ trường là một trường véc tơ. Vậy đặc trưng của trường véctơ là một hàm véctơ. Một trường véctơ xác định khi biết ba thành phần của véctơ đặc trưng cho trường đó: $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, tức là biết ba trường vô hướng. Từ nay về sau ta dùng các ký hiệu: $\vec{r} = (x,y,z)$ thay cho $\overrightarrow{0M}$, trong đó M có toạ độ *(x,y,z),* $d\vec{r} = (dx,dy,dz)$ $d\vec{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$.

Để học tốt chương này, người học cần thông thạo phép tính vi tích phân hàm nhiều biến.

Trong chương này, yêu cầu nắm vững các nội dung chính sau đây:

1. Các đặc trưng của trường vô hướng.

Mặt mức, Građiên và ý nghĩa vật lí của các đại lượng đó.

2. Các đặc trưng của trường véctơ.

Đường dòng, thông lượng, độ phân kì, hoàn lưu, véctơ xoáy và ý nghĩa vật lí của các đại lượng đó.

3. Các trường đặc biệt

Điều kiện nhận biết và tính chất của các trường đặc biệt: trường ống, trường điều hoà, trường thế.

NỘI DUNG

4.1. Các đặc trưng của trường vô hướng

4.1.1. Mặt mức

Cho trường vô hướng u(x,y,z), $(x,y,z) \in \Omega$. Tập các điểm $(x,y,z) \in \Omega$ thoả mãn phương trình: $u(x,y,z) = C$, C là hằng số **(4.1)** gọi là mặt mức của trường vô hướng ứng với giá trị *C*. Rõ ràng các mặt mức khác nhau (các giá trị *C* khác nhau) không giao nhau và miền Ω bị phủ kín bởi các mặt mức. Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ thì ta có khái niệm đường mức (đường đẳng trị) cho bởi phương trình:

$$u(x,y) = C$$

Chẳng hạn, một điện tích q đặt ở gốc toạ độ gây nên một trường điện thế $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}}$. Khi đó mặt mức có phương trình: $\dfrac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C$

hay $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{q^2}{C^2} = R^2$. Đó là các mặt cầu đồng tâm 0.

4.1.2.Građiên (Gradient)

Cho trường vô hướng $u = u(x,y,z), (x,y,z) \in \Omega$ và $u(x,y,z)$ khả vi trên Ω. Khi đó

$$gradu(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), (x,y,z) \in \Omega. \qquad \textbf{(4.2)}$$

(Xem mục 1.2.8,Chương 1.) Vậy một trường vô hướng $u(x,y,z)$ đã sinh ra một trường véctơ $gradu(x,y,z)$.

Từ tính chất của phép tính đạo hàm, ta có các tính chất sau đây của Građiên

$grad(\lambda u) = \lambda gradu$, λ là hằng số.

$grad(u+v) = gradu + gradv$

$grad(u.v) = v.gradu + u.gradv$

$\mathrm{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{1}{v^2}(\mathrm{vgradu} - \mathrm{ugradv})$, nếu $v \neq 0$

$\mathrm{gradf(u) = f'(u)gradu}$.

4.2. Các đặc trưng của trường véctơ

4.2.1. Đường dòng

Cho trường véctơ $\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z).\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $(x,y,z) \in \Omega$. Đường cong $C \subset \Omega$ gọi là đường dòng của trường véctơ $\vec{F}(M)$ nếu tại mỗi điểm *M* trên đường cong *C*, tiếp tuyến của *C* tại đó có cùng phương với véctơ $\vec{F}(M)$. Chẳng hạn các đường sức trong từ trường hoặc điện trường là các đường dòng. Nếu đường dòng có phương trình :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

và P,Q,R là các thành phần của $\vec{F}$ thì ta có hệ thức:

$$\frac{x'(t)}{P(x,y,z)} = \frac{y'(t)}{Q(x,y,z)} = \frac{z'(t)}{R(x,y,z)} \quad \textbf{(4.3)}$$

Gọi (4.3) là hệ phương trình vi phân của họ đường dòng của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$.

Chẳng hạn một điện tích q đặt tại gốc toạ độ tạo ra một điện trường $\vec{E}$, theo định luật Culông thì :

$$\vec{E} = \frac{q.\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3} = \left(\frac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{qy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{qz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Khi đó hệ phương trình vi phân của họ đường dòng là :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Để giải hệ phương trình này, bạn đọc có thể xem trong $[2],[6]$. Kết quả họ đường dòng (trong vật lí, thường gọi là các đường sức) cho bởi phương trình :

$x = k_1 t, y = k_2 t, z = k_3 t$, k_1, k_2, k_3 là các hằng số tuỳ ý.

Đó là họ đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

4.2.2. Thông lượng của trường véctơ

Trong mục 3.6.2 ta đã đưa ra định nghĩa thông lượng của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ qua mặt cong định hướng S xác định theo công thức (3.35) :

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \vec{F}.d\vec{S} \quad \textbf{(4.4)}$$

Trong đó $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là véctơ đơn vị của véctơ pháp tuyến của mặt S được định hướng, P, Q, R là các thành phần của $\vec{F}$.

4.2.3. Đive (Divergence, độ phân kỳ)

Ta gọi độ phân kỳ hay gọi tắt là dive của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ tại điểm $M(x,y,z)$ là đại lượng vô hướng, ký hiệu $div\vec{F}(x,y,z)$, xác định theo công thức :

$$div\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \textbf{(4.5)}$$

Vậy một trường véctơ $\vec{F}$ đã sinh ra một trường vô hướng $div\vec{F}$.

Nếu miền $V \subset \Omega$ có biên là S thì công thức Gauss –Ostrogradski (3.42) có dạng :

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS = \iiint_V div\vec{F}(x,y,z)dxdydz \quad \textbf{(4.6)}$$

Nghĩa là thông lượng của trường véctơ $\vec{F}$ qua phía ngoài mặt *S* bao miền *V* bằng tổng độ phân kỳ tại tất cả các điểm trong miền *V* của trường véctơ. Theo ý nghĩa cơ học của tích phân bội ba, suy ra $div\vec{F}(x,y,z)$ chính là mật độ thông lượng tại điểm *M(x,y,z)* của trường. Từ ý nghĩa vật lý của trường vận tốc ta thấy thông lượng của trường vận tốc qua mặt kín *S* ra phía ngoài là hiệu của lượng vật chất từ trong chảy ra và từ ngoài vào qua *S* (chẳng hạn lượng nước). Nếu thông lượng $\Phi > 0$, từ ý nghĩa vật lý, cũng như từ tính chất của tích phân ta thấy trong miền *V* bao bởi *S* phải có điểm nguồn. Chính vì thế ta gọi *M* là điểm nguồn của trường nếu $div\vec{F}(M) > 0$, ngược lại nếu $div\vec{F}(M) < 0$ thì *M* là điểm hút.

4.2.4. Hoàn lưu

Cho trường véctơ $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$ và một đường cong L trong trường véctơ. Ta gọi :

$$C = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \vec{F}\,d\vec{r} \qquad \textbf{(4.7)}$$

là hoàn lưu hay lưu số của trường $\vec{F}(x,y,z)$ theo đường cong *L*. Theo ý nghĩa cơ học của tích phân đường loại hai ta thấy nếu $\vec{F}(x,y,z)$ là trường lực thì hoàn lưu của nó theo *L* là công do lực $\vec{F}(x,y,z)$ sinh ra khi vật di chuyển dọc theo *L*.

4.2.5. Rôta (Rotation,Véc tơ xoáy)

Cho trường véctơ $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$, véctơ xoáy của trường, ký hiệu là $rot\vec{\mathrm{F}}$, xác định theo công thức :

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}} &= \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{z}}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{x}}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}\right)\vec{\mathrm{k}} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Vậy một trường véctơ $\vec{F}$ đã sinh ra một trường véctơ $rot\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)$.

Giả sử có mặt cong *S* trong trường được định hướng và biên của nó là đường *L* trơn từng khúc. Khi đó công thức Stokes (3.39) có dạng :

$$\oint_L \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S rot\vec{\mathrm{F}}.\vec{n}.dS = \iint_S rot\vec{\mathrm{F}}.d\vec{S} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Nghĩa là hoàn lưu của trường véctơ $\vec{F}$ dọc theo chu tuyến *L* của mặt cong *S* chính bằng thông lượng của véctơ xoáy qua mặt cong *S* của trường.

Từ ý nghĩa cơ học, ta thấy $\int_L \vec{F}.d\vec{r}$ là công của trường lực $\vec{F}(x,y,z)$ khi di chuyển dọc theo *L*. Nếu *L* là đường cong kín thì công sinh ra thường bằng không vì công sản ra trên phần "thuận chiều" của đường cong kín *L* cân bằng với công sản ra trên phần "ngược chiều", nếu không có "xoáy" ($rot\vec{F} = 0$). Do đó, từ công thức Stokes ta thấy hoàn lưu theo chu tuyến kín *L* đặc trung cho tính xoáy của trường trên mặt *S* có chu tuyến *L,* nói cách khác là tính chất "xoáy" của trường theo chu tuyến đó. Do đó, nếu $rot\vec{F}(M) \neq 0$ ta nói rằng *M* là điểm xoáy của trường và $rot\vec{F}(M) = 0$ ta nói rằng *M* là điểm không xoáy.

4.3. Một số trường đặc biệt.

4.3.1. Trường thế

a. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ gọi là trường thế nếu tồn tại một trường vô hướng $u(M)$ sao cho :

$$\vec{F}(M) = gradu(M), \forall M \in V \qquad \textbf{(4.10)}$$

Khi đó hàm $u(M)$ được gọi là hàm thế hay hàm thế vị của trường $\vec{F}(M)$, còn $V(M) = -u(M)$ gọi là thế năng của trường.

Giả sử $\vec{F}(M) = (P,Q,R)$ là trường thế với hàm thế là $u(M)$.

Khi đó $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}$, tức là : $du = Pdx + Qdy + Rdz$ nghĩa là $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của hàm $u(M)$.

b. Tính chất : Xuất phát từ định lý bốn mệnh đề tương đương (mục 3.4,Chương3.), suy ra :

1. Để trường $\vec{F}(M)$ là trường thế, điều kiện cần và đủ là trường $\vec{F}(M)$ không xoáy ($rot\vec{F}(M) = 0, \forall M \in V$).

2. Hoàn lưu của trường $\vec{F}(M)$ theo mọi chu tuyến kín, trơn từng khúc trong *V* đều bằng 0 $\left(\oint_L \vec{F}.d\vec{r} = 0\right)$.

Ví dụ 1 : Chứng tỏ rằng trường lực hấp dẫn tạo bởi trái đất tác động lên vệ tinh là trường thế và tìm hàm thế của nó.

Giải : Theo định luật Newton, trường lực hấp dẫn sẽ là :

$$\vec{F}(x,y,z) = -\gamma \frac{M.m}{|r|^3}\vec{r}$$

trong đó *M* là khối lượng trái đất, *m* là khối lượng vệ tinh. γ là hệ số hấp dẫn, $P(x,y,z)$ là vị trí của vệ tinh, còn gốc toạ độ coi là vị trí trái đất. Ta có :

$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0, \forall P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}$$ (xem ví dụ 14 chương 3)

Vậy trường lực hấp dẫn là trường thế. Hàm thế tính theo công thức (3.40) :

$$u(P) = \int_{\widehat{M_0M}} \vec{F}\, d\vec{r} + u(M_0) = -\gamma Mm \int_{\widehat{M_0M}} \frac{xdy + ydy + zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \gamma Mm \int_{\widehat{M_0M}} d\left(\frac{1}{r}\right) + u(M_0) = \frac{\gamma Mm}{r} + u(M_0)$$

trong đó các điểm P_0, P không trùng gốc toạ độ.

4.3.2. Trường ống

a. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ gọi là trường ống nếu $div\vec{F}(M) = 0, \forall M \in V$ hay :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(4.11)}$$

Ta gọi ống dòng của trường véctơ là phần không gian trong *V* tạo bởi các đường dòng tựa trên biên của một mặt cong *S* nào đó trong trường. Bản thân mặt *S* cũng như các thiết diện ngang của ống gọi là thiết diện của ống dòng.

b. Tính chất : Từ công thức Gauss – Ostrogradski ta suy ra các tính chất sau đây của trường ống :

* Thông lượng của trường ống qua mặt cong kín *S* bất kỳ trong trường đều bằng không. Thật vậy, $\Phi = \iint_S \vec{F}.d\vec{S} = \iiint_\Omega div\vec{F}dxdydz = 0$.

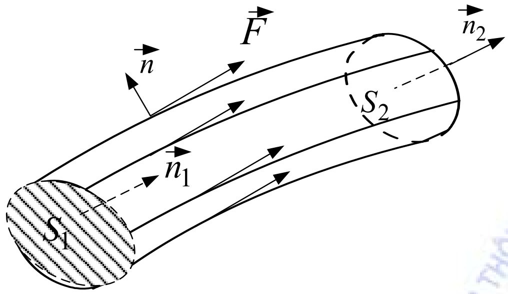
* Nếu *V* là đơn liên thì thông lượng của trường ống qua mặt *S* có biên *L* trong trường chỉ phụ thuộc vào biên *L* mà không phụ thuộc vào mặt *S*. Thật vậy, giả sử S_1 và S_2 là hai mặt cùng căng bởi biên *L*. Gọi Ω là miền giới hạn bởi hai mặt này thì :

$$0 = \iiint_\Omega div\vec{F}dxdydz = \iint_{S_1} \vec{F}.d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F}.d\vec{S}$$

Suy ra $\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S}$.

* Thông lượng qua mọi thiết diện của một ống dòng trong trường ống đều bằng không.

Thật vậy, giả sử S_1 và S_2 là hai thiết diện của ống dòng (H.4.1). Gọi S_{xq} là mặt xung quanh của ống dòng giữa S_1 và S_2 và Ω là vật thể giới hạn bởi S_{xq}, S_1, S_2.



H.4.1

Theo tính chất 1, ta có : $0 = \iint\limits_{S_1} \vec{F}.\vec{n}.dS + \iint\limits_{S_2} \vec{F}.\vec{n}.dS + \iint\limits_{S_{xq}} \vec{F}.\vec{n}.dS$.

ở đây $\vec{n}$ định hướng ra phía ngoài của Ω.

Theo định nghĩa của đường dòng, nên trên biên S_{xq} thì $\vec{F}.\vec{n} = 0$. Mặt khác, trên biên S_1 thì $\overrightarrow{n_1}$ ngược hướng với $\vec{n}$, tức là $\vec{F}.\vec{n} = -\vec{F}.\overrightarrow{n_1}$.

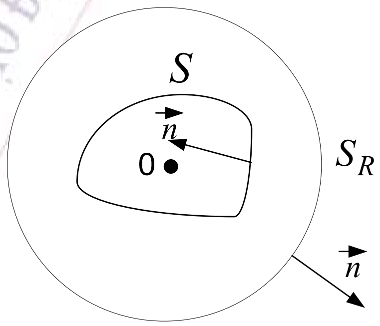
Còn trên biên S_2 thì $\overrightarrow{n_2}$ cùng hướng với $\vec{n}$.

Từ đó suy ra : $0 = -\iint\limits_{S_1} \vec{F}.\overrightarrow{n_1} dS + \iint\limits_{S_2} \vec{F}.\overrightarrow{n_2} dS$.

Hay là : $\iint\limits_{S_1} \vec{F} d\vec{S} = \iint\limits_{S_2} \vec{F} d\vec{S}$.

Dễ dàng kiểm tra thấy được trường hấp dẫn (ví dụ 1) hay điện trường (ví dụ 14 chương 3) đều là các trường ống và trường thế trừ gốc toạ độ. Do đó thông lượng qua mọi mặt cong kín không bao gốc toạ độ đều bằng 0.

Ví dụ 2 : Tìm thông lượng của điện trường sinh ra bởi điện tích *q* đặt ở gốc toạ độ qua phía ngoài mặt cong kín *S* bất kỳ bao gốc toạ độ.



H.4.2

Giải : Từ ví dụ 14 chương 3 ta có điện trường :

$$\vec{E} = q.\frac{\vec{r}}{r^3}$$

và thông lượng qua mặt cầu bán kính *R* là $4.\pi.q$ nghĩa là không phụ thuộc bán kính *R*. Giả sử *S* là mặt cong kín nào đó bao gốc toạ độ. Gọi S_R là mặt cầu tâm ở gốc toạ độ và bán kính *R* đủ lớn sao cho S_R bao cả *S* (H.4.2). Gọi Ω miền giới hạn bởi *S* và S_R. Khi đó :

$$\iiint_{S\cup S_R}\vec{E}.\vec{n}.dS=\iiint_{\Omega}div\vec{E}dxdydz=0$$

Suy ra $\iint_{S_R}\vec{E}.\vec{n}.dS=-\iint_{S}\vec{E}.\vec{n}.dS$, trong đó véctơ $\vec{n}$ của *S* hướng vào gốc toạ độ. Vậy thông lượng qua phía ngoài mặt cong *S* chính bằng thông lượng qua phía ngoài mặt cầu S_R và bằng $4.\pi.q$

4.3.3. Trường điều hoà

a. Định nghĩa : Trường véctơ $\vec{F}(M)$ gọi là trường điều hoà nếu nó vừa là trường ống vừa là trường thế, tức là :

$$\begin{cases} rot\vec{\mathrm{F}}=0 \\ div\vec{F}=0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.12)}$$

b. Tính chất : Hàm thế $u(M)$ của trường điều hoà $\vec{F}(M)$ là hàm điều hoà, nói cách khác hàm thế $u(M)$ thoả mãn phương trình Laplace : $\Delta u=0$

Hay $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad \textbf{(4.13)}$$

Thật vậy, $\vec{F}(M)$ là trường thế nên hàm thế *u* thoả mãn $\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\frac{\partial u}{\partial z}=R$.

Mặt khác $\vec{F}(M)$ là trường ống nên $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

Do đó $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Theo định nghĩa thì trường hấp dẫn và điện trường là các trường điều hoà trong miền *V* không chứa gốc toạ độ. Hàm thế của trường đó có dạng $\frac{C_1}{r}+C_2$. Trong đó C_1,C_2 là các hằng số. Các ví dụ sau sẽ chỉ ra các hàm điều hoà tổng quát hơn.

Ví dụ 3. Chứng minh hàm số :

$$\mathrm{u(M)}=\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{r}}+\mathrm{C}_2,\mathrm{r}=\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)^2+(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^2},\quad \mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2 \text{ là các hằng số tuỳ ý}$$

là hàm điều hoà trong mọi miền *V* không chứa điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Giải : Ta chứng minh hàm $u(M)$ thoả mãn phương trình Laplace (4.13).

Thật vậy $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{C_1 r_x'}{r^2} = -C_1 \frac{x - x_0}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5}$$

Tương tự :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -C_1 \frac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5}$$

Do đó : $\Delta u = -C_1 \frac{3r^2 - 3\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]}{r^5} = 0$

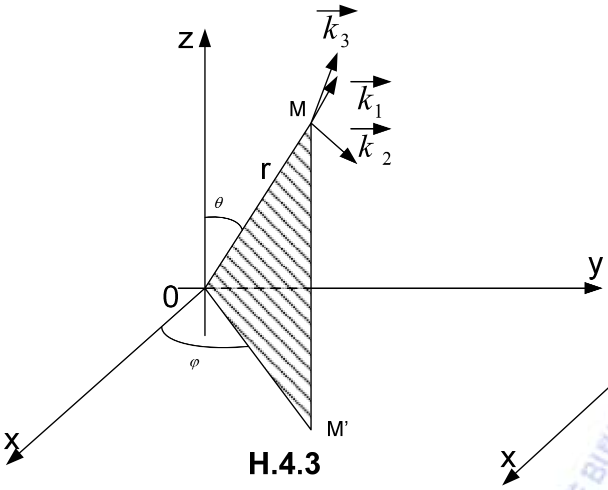
Tương tự kiểm tra thấy rằng hàm $u(x, y) = \ln\frac{1}{r}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ là hàm điều hoà trong mọi miền phẳng D không chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$, tức là hàm u đã cho thoả mãn phương trình Laplace trong mặt phẳng :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

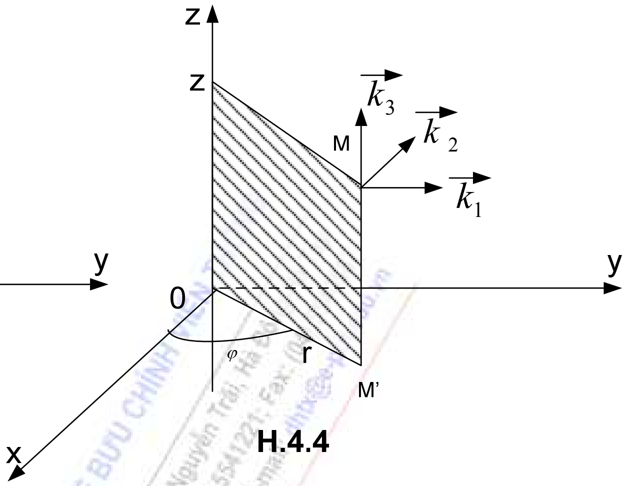
4.4. Hệ tọa độ cong trực giao

4.4.1..Định nghĩa:

Mỗi một điểm M trong không gian thực được xác định bởi một bộ 3 số sắp thứ tự (u_1, u_2, u_3) và ngược lại, được kí hiệu M(u_1, u_2, u_3). Các số u_1, u_2, u_3 gọi chung là toạ độ cong của điểm M. Các mặt cong lần lượt có phương trình: $u_1 = u_{10}$, $u_2 = u_{20}$, $u_3 = u_{30}$, (u_{10}, u_{20}, u_{30} là các hằng số) gọi là các mặt toạ độ trong hệ toạ độ cong. Giao của các mặt toạ độ gọi là các đường toạ độ. Nếu các đường toạ độ trực giao từng đôi thì hệ toạ độ cong được gọi là hệ toạ độ cong trực giao. Như vậy hệ toạ độ đề các, hệ toạ độ trụ (xem mục 2.4.2.), hệ toạ độ cầu (xem mục 2.4.3.) là các hệ toạ độ trực giao (H.4.3, H 4.4)



H.4.3



H.4.4

4.4.2. Liên hệ giữa tọa độ đề các và tọa độ cong trực giao

Mối liên hệ giữa các tọa độ được cho bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \qquad \textbf{(4.14)}$$

Các đường tọa độ l_1, l_2, l_3 cho bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_{i0} \\ u_j(x, y, z) = u_{j0} \end{cases}, \quad (i, j = 1,2,3.) \text{ và } i \neq j. \qquad \textbf{(4.15)}$$

Các véctơ đơn vị của các đường tọa độ tại điểm M là $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ (H 4.5), chúng thoả mãn: $\vec{k}_i \vec{k}_j = 0$, khi $i \neq j$.

Đặt $h_i = \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{\partial u_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u_i}{\partial z})^2}}, i = 1,2,3.$ Người ta đã chứng minh được những công thức sau đây, cho mối liên hệ giữa toạ độ đề các và toạ độ cong.

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = (h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3)$$

$$d\vec{S} = (dx, dy, dz) = (h_2 h_3 du_2 du_3, h_3 h_1 du_3 du_1, h_1 h_2 du_1 du_2) \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$dV = dxdydz = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

Trong toạ độ cầu (r, φ, θ), ta có: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$.

Trong toạ độ trụ (r,φ,z), ta có: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$.

4.4.3.Các đặc trưng của trường trong hệ toạ độ cong trực giao

a. GradU($\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$)

Công thức tổng quát: $gradU = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial U}{\partial u_1}\vec{k}_1 + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial U}{\partial u_2}\vec{k}_2 + \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial U}{\partial u_3}\vec{k}_3$.

Trong toạ độ cầu cho $U(r,\varphi,\theta)$, ta có:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{k}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{k}_2 + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{k}_3. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Trong toạ độ trụ cho $U(r,\varphi,z)$, ta có: $gradU = \dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{k}_1 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{k}_2 + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}_3$. **(4.17)**

b. Div $\vec{\mathbf{F}}$($\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$)

Công thức tổng quát: $div\vec{F} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_3h_1) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right]$

Trong toạ độ cầu (r,φ,θ), cho $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$, ta có:

$$div\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi r)\right] \qquad \textbf{(4.18)}$$

Trong toạ độ trụ (r,φ,z), cho $\vec{F} = (F_r, F_\varphi, F_z)$, ta có:

$$div\vec{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(F_z r)\right] \qquad \textbf{(4.19)}$$

c. Rot $\vec{\mathbf{F}}$($\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$)

Công thức tổng quát:

$$rot\,\vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{k}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\vec{k}_2}{h_3h_1} & \dfrac{\vec{k}_3}{h_1h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(4.20)}$$

Trong toạ độ cầu (r,φ,θ), cho $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$, ta có:

$$rot\,\vec{F} = \frac{\vec{k}_1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi r \quad \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\theta r)\right] + \frac{\vec{k}_2}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_r) - \frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r\sin\theta)\right] +$$

$$+\frac{\vec{k}_3}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\theta r) - \frac{\partial}{\partial\theta}(F_r)\right] \qquad \textbf{(4.21)}$$

Trong toạ độ trụ (r,φ,z), cho $\vec{F} = (F_r, F_\varphi, F_z)$, ta có:

$$rot\,\vec{F} = \frac{\vec{k}_1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(F_z) - \frac{\partial}{\partial z}(F_\varphi r)\right] + \vec{k}_2\left[\frac{\partial}{\partial z}(F_r) - \frac{\partial}{\partial r}(F_z)\right] + \quad + \frac{\vec{k}_3}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_r)\right]$$

(4.22)

***d.* Biểu diễn ΔU**

Công thức tổng quát:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\right)\right]$$

Trong toạ độ cầu cho $U(r,\varphi,\theta)$, ta có:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} \qquad \textbf{(4.23)}$$

Trong toạ độ trụ cho $U(r,\varphi,z)$, ta có:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $U = r(\cos\theta + \sin\theta)$, trong đó r là khoảng cách từ gốc toạ độ O đến điểm M, còn θ là góc giữa $\vec{OM}$ và trục Oz.

a. Tính gradU

b. Xác định véctơ đơn vị $\overrightarrow{n_0}$ của mặt phẳng $U = Const$ tại điểm có $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Giải:

a. Theo giả thiết, hàm số U có các đối số là các toạ độ cầu.

Thay U vào công thức (4.16), ta nhận được

$$gradU = (\cos\theta + \sin\theta)\,\vec{k}_1 + (\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{k}_2$$

b. Ta có $\vec{n}_o //$ gradU, theo trên $|gradU| = \sqrt{2}$, thay $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ vào công thức trên suy ra:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|(1+\sqrt{3})\vec{k}_1 + (1-\sqrt{3})\vec{k}_2\right|.$$

Ví dụ 5: Tìm hằng số k để trường véctơ cho trong hệ toạ độ cầu $\vec{F} = r^k\,\vec{r}$ có thông lượng bảo toàn (trường ống).

Giải: Biểu diễn $\vec{F} = r^k\,\vec{r} = (r^{k+1}, 0, 0)$, theo công thức (4.18) nhận được:

$$div\,\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^{k+3}\sin\theta)\right] = (k+3)r^k = 0, \text{ suy ra } k = -3.$$

Ví dụ 6: Chứng minh trường véctơ cho trong hệ toạ độ cầu $\vec{F} = r^k\,\vec{r}$ là trường thế với mọi số k.

Giải: Biểu diễn $\vec{F} = r^k\,\vec{r} = (r^{k+1}, 0, 0)$, theo công thức (4.21) nhận được $rot\,\vec{F} = \dfrac{\vec{k}_2}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(r^{k+1})\right] - \dfrac{\vec{k}_3}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(r^{k+1})\right] = 0$, với mọi k. Vậy trường véctơ đã cho là trường thế.

Ví dụ 7. Biết $\Delta u = 0$ và $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$. Tìm dạng tổng quát của hàm u .

Giải : Rõ ràng hàm u được cho trong toạ độ trụ. Theo công thức (4.24), ta có

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Suy ra $r\dfrac{du}{dr} = C_1, \Rightarrow du = C_1\dfrac{dr}{r}, \Rightarrow u = C_1\ln r + C_2$.

(C_1, C_2, là các hằng số tuỳ ý)

Ví dụ 8. Biết $\Delta u = 0$ và $u = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Tìm dạng tổng quát của hàm u

Giải :Rõ ràng hàm u được cho trong toạ độ cầu. Theo công thức (4.23), ta có

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0$$

Suy ra ra $r^2\dfrac{du}{dr} = C_1, \Rightarrow du = C_1\dfrac{dr}{r^2}, \Rightarrow u = -C_1\dfrac{1}{r} + C_2$.

(C_1, C_2, là các hằng số tuỳ ý)

TÓM TẮT CHƯƠNG 4

- Phương trình mặt đẳng trị : $u(x,y,z)=C$, C là hằng số
- Građiên tại điểm (x,y,z). $gradu(x,y,z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}\right),(x,y,z)\in\Omega$
- Phương trình đường dòng :

$$\frac{x'(t)}{P(x,y,z)}=\frac{y'(t)}{Q(x,y,z)}=\frac{z'(t)}{R(x,y,z)}$$

- Thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ qua mặt cong S :

$$\Phi=\iint_S \vec{F}.\vec{n}.dS=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

- Độ phân kỳ của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ tại điểm (x,y,z):

$$div\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

- Hoàn lưu của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ dọc theo đường cong L :

$$C=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L \vec{F}.d\vec{r}$$

- Rôta của trường véc tơ $\vec{F}(P,Q,R)$ tại điểm (x,y,z).

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right).\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right).\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

- Trường thế : $\vec{F}(M)$ là trường thế nếu :

$\exists u(M):\vec{F}(M)=gradu(M),\forall M\in V$ hay $rot\vec{F}(M)=0,\forall M\in V$.

- Trường ống : $\vec{F}(M)$ là trường ống nếu :

$$div\vec{F}(M)=0,\forall M\in V$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

● Trường điều hoà : $\vec{F}(M)$ là trường điều hoà nếu $\begin{cases} rot\vec{F} = 0 \\ div\vec{F} = 0 \end{cases}$

● Phương trình Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Nghiệm của phương trình Laplace gọi là hàm điều hoà.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 4.

4.1. Các mặt mức của một trường vô hướng không giao nhau.

Đúng ☐ Sai ☐

4.2. $gradu(x,y,z)$ là một véc tơ.

Đúng ☐ Sai ☐

4.3. $div\vec{F}(x,y,z)$ là một véc tơ.

Đúng ☐ Sai ☐

4.4. $rot\vec{F}(x,y,z)$ là một véc tơ.

Đúng ☐ Sai ☐

4.5. Trường thế là một trường vô hướng có *gradu = 0.*

Đúng ☐ Sai ☐

4.6. Trường thế là một trường không xoáy và ngược lại

Đúng ☐ Sai ☐

4.7 Trường điều hoà là trường vô hướng u mà u thoả mãn phương trình Laplace.

Đúng ☐ Sai ☐

4.8. Chứng minh các công thức

a. $div(u\vec{F}) = gradu.\vec{F} + udiv\vec{F}$

b. $div\left[\vec{G},\vec{F}\right] = \vec{F}rot\vec{G} - \vec{G}rot\vec{F}$

c. $rot(u\vec{F}) = \left[gradu,\vec{F}\right] + urot\vec{F}$

4.9. Cho $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Tính góc giữa gradu tại điểm (1,1) và (3,4).

4.10. Cho $u = \ln\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$. Xác định điểm tại đó $gradu = \left(1, -\dfrac{16}{9}\right)$

4.11. Tìm thông lượng của các trường véc tơ sau:

a. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ qua phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ hướng ra ngoài.

b. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$ hướng ra ngoài.

c. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$ hướng lên trên.

4.12. Tính lưu số của trường $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ dọc theo cung tròn nhỏ nhất của đường tròn lớn của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm M(3,4,0) và N(0,0,5).

4.13.Tính $\int\limits_L 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz$,

L có phương trình $x = \cos t, y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z = \frac{1}{2}\sin t$ hướng theo chiều tăng của t.

4.14. Chứng minh rằng các trường vectơ sau đây là những trường thế, tìm hàm thế vị của chúng.

a. $\vec{F} = e^{-x}\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]\vec{i} + \frac{e^{-x}}{x+y}\vec{j}$

b. $\vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(2y+z+x)\vec{j} + xy(2z+x+y)\vec{k}$

c. $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

4.15. Cho u và v là các hàm điều hoà. Chứng minh trường véc tơ $ugradv - vgradu$ là trường ống.

CHƯƠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

GIỚI THIỆU

Cũng như phép tính đạo hàm và vi phân, phương trình vi phân (PTVP) có tầm quan trọng rất lớn và có ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực khoa học kỹ thuật và kinh tế. Cụ thể là nhiều bài toán kinh tế, kỹ thuật điện tử, y học,... đều dẫn đến phương trình vi phân. Trong toán học, phương trình vi phân là một chuyên ngành rất phát triển. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về phương trình vi phân thường (gọi vắn tắt là phương trình vi phân). Để học tốt chương này, yêu cầu người học phải nhận dạng đươc từng loại phương trình vi phân, qua đó mới có thể tích phân được (tìm được nghiệm), bởi vì không có một phương pháp chung nào để giải phương trình vi phân. Giải PTVP là một quá trình tính tích phân, vì thế yêu cầu người học phải thông thạo phép tính tích phân và vi phân, đó là nội dung cốt lõi của toán học cao cấp.

Một PTVP là một phương trình có dạng $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ hay $F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},...,\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}})=0$ trong đó x là biến số độc lập, $y=y(x)$ là hàm số phải tìm, $y',y'',...,y^{(n)}$ là các đạo hàm của hàm số phải tìm, (trong PTVP nhất thiết phải có mặt ít nhất đạo hàm cấp k nào đó của hàm phải tìm). Cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số y phải tìm có mặt trong PTVP được gọi là cấp của PTVP, chẳng hạn:

$$y'+x=0 \text{ (PTVP cấp 1)}$$

$$y''+(y')^2=0 \text{ (PTVP cấp 2)}$$

Hàm số $y=y(x)$ là một nghiệm của PTVP nếu như nó thoả mãn phương trình tức là thay nó vào phương trình sẽ nhận được đồng nhất thức. Chẳng hạn với phương trình $y'=x$ ta có nghiệm $y=\frac{x^2}{2}$, thậm chí $y=\frac{x^2}{2}+C$ trong đó C là hằng số tuỳ ý.

Giải hay tích phân một PTVP là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của PTVP là một đường cong (đồ thị của nghiệm), vì thế người ta gọi đường cong đó là đường cong tích phân của PTVP.

PTVP được gọi là tuyến tính cấp n nếu hàm số F là bậc nhất đối với $y,y',...,y^{(n)}$, tức là phương trình có dạng:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

trong đó $a_1(x),...,a_n(x),f(x)$ là các hàm số cho trước.

Nếu $f(x)\equiv 0$ thì người ta gọi là phương trình tuyến tính cấp n thuần nhất.

Nếu $f(x)\neq 0$ thì người ta gọi là phương trình tuyến tính cấp n không thuần nhất.

Trong chương này cần nắm vững các nội dung chính sau đây:

1. Các phương trình vi phân cấp một thường gặp.

Cần phân biệt được từng dạng phương trình vi phân và phương pháp tích phân tương ứng với tùng dạng.

2. Các tính chất của PTVP tuyến tính cấp hai.

Từ các tính chất của PTVP tuyến tính có thể tích phân được khi đã biết một nghiệm của PTVP tuyến tính thuần nhất tương ứng, hoặc hai nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho, đặc biệt là khai thác nguyên lí chồng chất nghiệm.

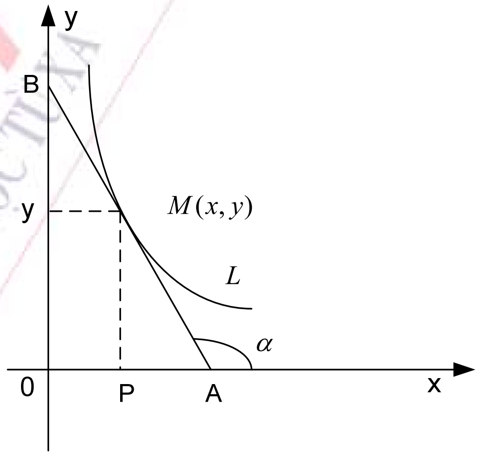
3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng số.

Bên cạnh phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, cần nhận biết dạng hàm đặc biệt ở vế phải để tích phân PTVP bằng phương pháp hệ số bất định.Vận dụng, có thể giải PTVP tuyến tính có hệ số hằng số cấp n.

NỘI DUNG

5.1. Phương trình vi phân cấp 1

Trước hết ta xét một bài toán hình học dẫn đến PTVP. Hãy tìm phương trình đường cong L $(y = y(x))$ có tính chất: mỗi đoạn của tiếp tuyến với đuờng cong C nằm giữa hai trục toạ độ đều bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau.



H.5.1

Giả sử $M(x,y) \in L$, khi đó hệ số góc tiếp tuyến với đường cong tại M là:

$$y'(x) = tg\alpha = -\frac{y}{PA} \text{ (xem H.5.1)}$$

Do M là trung điểm của AB nên $OP = PA = x$, suy ra $\quad y' = -\dfrac{y}{x}$.

Như vậy hàm số phải tìm thoả mãn PTVP cấp 1. Sau này chúng ta sẽ có cách giải phương trình trên, nhưng trước hết ta có thể thử lại rằng hàm số $y = \frac{C}{x}$ thoả mãn phương trình với C là hằng số tuỳ ý. Tóm lại, họ các đường hyperbol có tính chất đã đặt ra.

5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Dạng tổng quát của PTVP cấp 1:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ hay } F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad \textbf{(5.1)}$$

Nếu từ (5.1) giải ra được *y'* thì ta có PTVP cấp 1 đã giải ra đối với đạo hàm:

$$y' = f(x, y) \quad \textbf{(5.2)}$$

A. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy-Peano

Cho phương trình (5.2): $y' = f(x, y)$ và $(x_0, y_0) \in D$ **(5.3)**

Định lý 5.1. Nếu *f(x,y)* liên tục trên miền D trong mặt phẳng Oxy thì tồn tại nghiệm: $y = y(x)$ trong lân cận x_0 thoả mãn $y_0 = y(x_0)$. Ngoài ra nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trên miền D thì nghiệm tìm được là duy nhất.

Bài toán tìm nghiệm của PTVP thoả mãn điều kiện (5.3) gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện (5.3) gọi là điều kiện ban đầu.

B. Nghiệm tổng quát, tích phân tổng quát

Ta gọi nghiệm tổng quát của PTVP cấp 1 là hàm số

$$y = \varphi(x, C) \quad \textbf{(5.4)}$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý, thoả mãn các điều kiện sau:

a. Thoả mãn PTVP với mọi hằng số C.

b. Có thể tìm một giá trị $C = C_0$ sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện ban đầu $y_0 = y(x_0) = \varphi(x_0, C_0)$ với (x_0, y_0) thoả mãn định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

Nghiệm tổng quát cho dưới dạng ẩn:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \textbf{(5.5)}$$

Hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của PTVP cấp 1. Về mặt hình học, nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát xác định một họ đường cong trong mặt phẳng không cắt nhau gọi là các đường cong tích phân của PTVP cấp 1.

C. Nghiệm riêng, tích phân riêng

Hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ gọi là một nghiệm riêng của PTVP, tức là được suy ra từ nghiệm tổng quát (5.4) với hằng số C xác định $C = C_0$. Tương tự ta có một tích phân riêng của PTVP

$$\Phi(x, \varphi, C_0) = 0$$

Chú ý: PTVP còn có các nghiệm khác nữa, không thể nhận được từ nghiệm tổng quát, được gọi là nghiệm kỳ dị.

5.1.2. Các PTVP cấp một thường gặp

A. Phương trình với biến số phân li

a. Định nghĩa: Phương trình với biến số phân li (phương trình tách biến) là PTVP có dạng:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \qquad \textbf{(5.6)}$$

Chẳng hạn: $\dfrac{x^2dx}{1+x^2} + \dfrac{ydy}{1+y^2} = 0$ là phương trình với biến số phân li.

b. Phương pháp tích phân

Phương trình (5.6) có dạng:

$$f_1(x)dx = -f_2(y)dy = -f_2(y)y'(x)dx$$

Lấy tích phân hai vế ta có :

$$\int f_1(x)dx = -\int f_2(y)y'dx + C = -\int f_2(y)dy + C$$

Vậy $\displaystyle\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C$ **(5.7)**

Đó là tích phân tổng quát của (5.6)

Chú ý : Phương trình dạng : $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ có thể đưa về dạng tách biến. Thật vậy, nếu $M_2(x) \neq 0$ và $N_1(y) \neq 0$ thì chia hai về của phương trình cho $M_2(x).N_1(y)$ sẽ được :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Đó là phương trình với biến số phân li.

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ hoặc $N_1(y) = 0$ tại $y = b$ thì bằng cách thay trực tiếp nhận được $x = a$ hoặc $y = b$ là nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tích phân tổng quát của phương trình :

$$x^3(y+1)dx + (x^4-1)(y-2)dy = 0$$

Giải : Với $y+1 \neq 0$ và $x^4 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{x^3}{x^4-1}dx + \frac{y-2}{y+1}dy = 0$$

Tích phân tổng quát là :

$$\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4-1)}{x^4-1}dx + \int\left(1 - \frac{3}{y+1}\right)dy = C$$